Leçon 230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

RM
2022-2023

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Séries réelles et complexes

1.1 Convergence des séries

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes.

Définition 1 : On appelle série de terme général u_n, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = u_0 + ... + u_n$. On note cette série $\sum u_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n s'appelle la somme partielle d'ordre n, de la série $\sum u_n$.

Définition 2 : On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite (S_n) converge. Dans ce cas, la limite S de la suite (S_n) s'appelle la somme de la série $\sum u_n$ et on la note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exemple 3 : Soit $a \in \mathbb{C}$. Alors la série $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$. On a alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

Définition 4 : Si $\sum u_n$ est une série convergente de somme S, le nombre $R_n = S - S_n$ est appelé le reste d'ordre n de la série.

Remarque 5 : Le reste R_n n'est défini que pour les séries convergentes, et la suite (R_n) converge vers 0. On a aussi $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Proposition 6 : On ne change pas la nature d'une série $\sum u_n$ en modifiant un ensemble fini des termes de la suite (u_n).

Proposition 7 : L'ensemble des séries numériques est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, dont l'ensemble des séries convergentes est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel.

Proposition 8 : Si une série $\sum u_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exemple 9 : C'est une condition nécessaire pour la convergence d'une série mais pas suffisante. En effet, la suite $u_n = \ln 1 + 1/n$ converge vers 0, mais la série $\sum u_n$ diverge.

Proposition 10 : On appelle série télescopique associé à une suite (a_n), la série $\sum u_n$ où $u_n = a_n - a_{n-1}$. Alors la série $\sum u_n$ et la suite (a_n) sont de même nature, et en cas de convergence, on a $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n - a_0$.

Exemple 11 : Cela permet de prouver que la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente de somme 1.

Théorème (Critère de Cauchy) 12 : Une série numérique $\sum u_n$ converge si et seulement si elle satisfait le critère de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \varepsilon.$$

Exemple 13 : On peut alors montrer que la série harmonique $\sum 1/n$ diverge car elle ne vérifie pas le critère de Cauchy.

Définition 14 : Une série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème 15 : Toute série absolument convergente est convergente.

Remarque 16 : La réciproque de ce théorème est fausse. Par exemple, la série $\sum (-1)^n/n$ converge par le cssa (vue plus loin) mais la série harmonique diverge.

Définition 17 : Une série numérique qui converge mais qui ne converge pas absolument est dite semi-convergente.

1.2 Séries à termes positifs

On suppose ici deux suites (u_n) et (v_n) à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Lemme 18 : Une série à terme positifs converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ des sommes partielles est majorée.
Si la série diverge, alors la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$.

Théorème (Règle de comparaison) 19 : Supposons que pour tout $n \geq 0, u_n \leq v_n$. Alors

- Si la série $\sum v_n$ converge, il en est de même de la série $\sum u_n$, et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
- Si la série $\sum u_n$ diverge, il en est de même de la série $\sum v_n$.

Exemple 20 : Comme $1/n \leq 1/\sqrt{n}$, on en déduit que la série $\sum 1/\sqrt{n}$ diverge.

Théorème (Règle d'équivalence) 21 : Supposons que $u_n \sim v_n$ lorsque $n \to +\infty$. Alors
$i)$ Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
$ii)$ En cas de convergence, les restes sont équivalents.
$iii)$ En cas de divergence, les sommes partielles sont équivalentes.

Théorème 22 : La série de Riemman $\sum 1/n^\alpha$ $(\alpha_i n \mathbb{R})$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Théorème (Règle de domination) 23 : Supposons que $u_n = O(v_n)$ (respectivement $u_n = o(v_n)$) lorsque $n \to +\infty$. Alors si la série $\sum v_n$ est convergente, la série $\sum u_n$ aussi et on a $R_n^u = O(R_n^v)$ (respectivement $R_n^u = o(R_n^v)$).

Théorème (Comparaison série-intégrale) 24 : Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonctions positive et décroissante. Alors la série $\sum_{n \geq a} f(n)$ et l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} dt$ sont de même nature. En cas de convergence, on a l'encadrement

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt.$$

1.3 Règle de Cauchy et de d'Alembert

Théorème (Règle de Cauchy) 25 : Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans $\mathbb{K}$ et soit $L = \limsup\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$ (L éventuellement infini). Alors
- Si $L < 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument.
- si $L > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

Exemple 26 : On montre que la série de terme général $u_n = (1 - 1/n)^{n^2}$ est convergente grâce à la règle de Cauchy.

Théorème (Règle de d'Alembert usuelle) 27 : Soit (u_n) à valeurs dans $\mathbb{K}$. Supposons que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lambda$ existe. Alors
- Si $\lambda < 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument.
- si $\lambda > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

Exemple 28 : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et on considère la série de terme général $u_n = a^n/n$, $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit de la règle de d'Alembert que la série converge si $a < 1$ et diverge si $a > 1$.

Remarque 29 : Si $\lambda = 1$, on ne peut malheureusement pas conclure, il se peut que la série converge ou bien diverge.

Proposition 30 : Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si la suite $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)$ admet une limite λ finie ou infinie, alors la suite $(\sqrt[n]{|u_n|})$ admet la même limite λ.

2 Études de séries particulières

2.1 Série alterné

Définition 31 : On appelle série alternée toute série de terme général $(-1)^n a_n$ où (a_n) est une suite réelle de signe constant.

Théorème (Critère de Leibniz) 32 : Soit (a_n) une suite à termes positifs, décroissante et tendant vers 0. Alors la série alternée $\sum(-1)^n a_n$ est convergente. De plus, sa somme S vérifie $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ pour tout n, et son reste R_n d'ordre n vérifie $|R_n| \leq a_{n+1}$.

Exemple 33 : Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la série $\sum(-1)^{n-1} n^{-\alpha}$ est alterné et la suite de terme général $1/n^\alpha$ est décroissante vers 0. Alors la série $\sum(-1)^{n-1} n^{-\alpha}$ est convergente.

Remarque 34 : La décroissance est vitale. Par exemple, la série alternée $\sum(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ vérifie tout sauf la décroissance et est divergente.

La série de terme générale $\frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1}$ est convergente et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{\pi^2}{16}.$$

Dev 1

2.2 Série entière

Définition 35 : On appelle série entière complexe de variable complexe toute série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : z \mapsto a_n z^n$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ avec (a_n) une suite complexe. On la note $\sum a_n z^n$.

Lemme (Abel) 36 : Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Supposons que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée. Alors, pour tout nombre complexe z tel que $0 \geq |z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Théorème 37 : Il existe un nombre R et un seul tel que :
1) si $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.
2) si $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge.

Remarque 38 : On peut avoir $R = 0$ et $R = +\infty$. Si $R = +\infty$, alors la série $\sum a_n z^n$ converge pour tout z de $\mathbb{C}$.

Définition 39 : L'élément $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+,\ \text{la suite } (|a_n|r^n) \text{ est bornée}\}$ s'appelle le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$. Le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$ est le disque de convergence de la série.

Remarque 40 : L'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, |z| = R\}$ est appelé le cercle d'incertitude. Si R est fini, on ne peut prévoir le comportement de la série sur ce cercle. Par exemple, les trois séries entières suivantes ont un rayon de convergence égale à 1 mais :

- La série $\sum z^n$ diverge en tout point tel que $|z| = 1$.
- La série $\sum z^n/n^2$ converge en tout point tel que $|z| = 1$.
- La série $\sum z^n/n$ diverge en $z = 1$, mais converge mais pour tout autre point tel que $|z| = 1$.

Proposition (Règle de d'Alembert) 41 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, et notons R son rayon de convergence. Si la suite de terme général $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ converge vers $L \in \overline{\mathbb{R}}_+$, alors $R = 1/L$.

Exemple 42 : On trouve que le rayon de converge de la série $\sum z^n/n!$ est $R = +\infty$.

Remarque 43 : La règle de d'Alembert ne fonctionne pas sur les séries entières de la forme $\sum a_n z^{2n}$, $\sum a_n z^{2n+1}$ ou $\sum a_n z^{n^2}$. On peut s'en sortir en utilisant la règle de d'Alembert pour les série numérique. Par exemple, pour trouver le rayon de convergence de $\sum \frac{2^n z^{2n+1}}{n+1}$, on pose $u_n = \frac{2^n ||z_0|^{2n+1}}{n+1}$ pour $z_0 \in \mathbb{C}^*$. On a $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 2|z_0|^2$. Comme on veut $2|z_0|^2 < 1$, on en déduit que $R = 1/\sqrt{2}$.

Théorème (Formule de Hadamard) 44 : Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$ est donné par $R = 1/L$ avec $L = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}$.

Corollaire (Règle de Cauchy) 45 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Si la suite $|a_n|^{1/n}$ converge vers $L \in \overline{\mathbb{R}}_+$, alors $R = 1/L$.

Exemple 46 : Pour la série entière $\sum \frac{n}{2^n} z^n$, on a $R = 2$.

Proposition 47 : La série entière dérivée de $\sum a_n z^n$ est $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$ et à le même rayon de convergence que celle-ci.

Théorème 48 : Une série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur toute partie compacte incluse dans le disque de convergence.

Théorème 49 : Soient $\sum a_n z^n$ une série entière, R son rayon de convergence, et S sa somme. Alors la fonction S est continue sur le disque ouvert $D(0, R)$.

3 Application aux série de Fourier

Définition 50 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On appelle coefficients de Fourrier exponentielle et trigonométrique de f les nombres complexes définis par $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = 1/2\pi \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$,$\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n(f) = 1/\pi \int_0^{2\pi} f(t) \cos ntdt$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = A/\pi \int_0^{2\pi} f(t) \sin ntdt$.
On appelle série de Fourrier associé à f la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$ ou $a_0(f)/2 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (a_n(f) \cos nx + b_n(f) \sin nx)$.

Remarque 51 : On va montrer après des cas de convergence.

Proposition 52 : En posant $b_0(f) = 0$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$.

Proposition 53 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors :
Si f est paire, alors $b_n(f) = 0$ et $a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos ntdt$.
si f est impaire, alors $a_n(f) = 0$ et $b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin ntdt$.

Théorème (Égalité de Parseval) 54 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux.
Alors les séries $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2, \sum |a_n(f)|^2, \sum |b_n(f)|^2$ convergent et on a

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

Théorème (Riemann-Lebesgue) 55 : Soit $f : I = [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors $\lim_{|x|\to+\infty} \int_a^b f(t) e^{ixt} dt = 0$.

Théorème (Jordan-Dirichlet) 56 : • Si f est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourrier de f converge en ce point x vers $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$. En particulier, si f est continue en x, la série de Fourrier de f en x converge vers $f(x)$.
• Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction 2π-périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourrier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

Soit $\zeta : \begin{array}{ccl} \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{R} \\ k & \mapsto & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} \end{array}$ la fonction zêta de Riemann définie sur les entiers naturels. Alors $\forall k \in \mathbb{N}, \zeta(2k) = (-1)^{k-1}\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}b_{2k}$, ou $(b_n)_{n\geq 0}$ sont les nombres de bernouilli définie par $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!}z^n$ sous réserve que f est développable en série entière.

Dev 2

Exemple/Application 57 : En étudiant les coefficients de Fourrier de $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi]$, on en déduit que $\zeta(2) = \pi^2/6, \zeta(4) = \pi^4/90, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \pi^2/8$.

Application 58 : Nous avons les résultats suivants pour les intégrales de Fresnel : $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Références :

1. Analyse Gourdon
2. Suites et séries ... El Amrani
3. Oraux X-ENS tome 2 analyse